

Einfach zusammenhängende Algebren vom Typ A_n

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophischen Fakultät II

der

Universität Zürich

von

CHRISTIAN LAESER

aus Gontenschwil AG

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. P. Gabriel

Zürich 1982

Zentralstelle der Studentenschaft

Einfach zusammenhängende Algebren vom Typ A_n

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophischen Fakultät II

der

Universität Zürich

von

CHRISTIAN LAESER

aus Gontenschwil AG

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. P. Gabriel

Zürich 1982

Zentralstelle der Studentenschaft



Einleitung

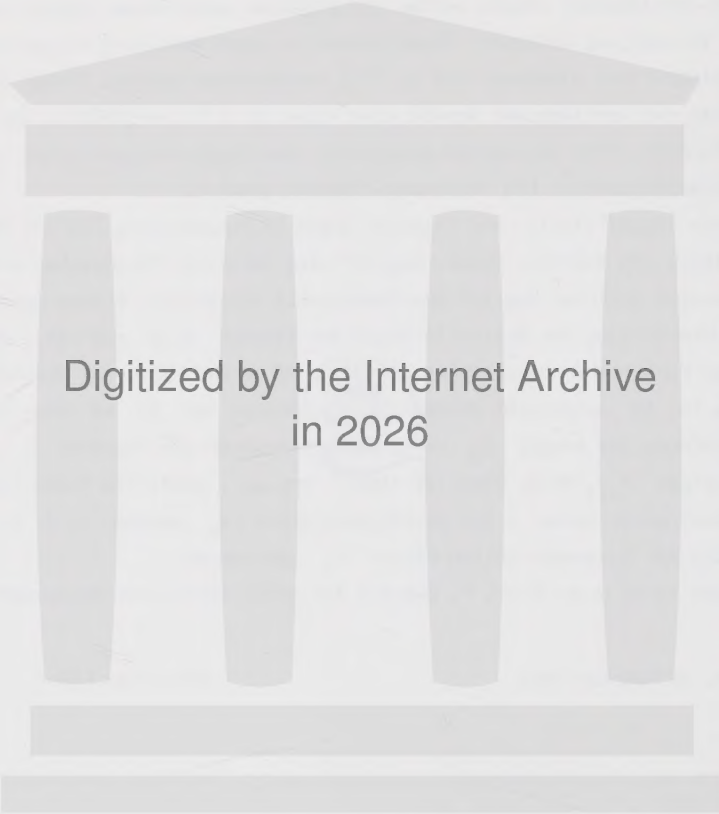
In der Arbeit "Covering Spaces in Representation-Theory" von BONGARTZ und GABRIEL ([1]) wird der Begriff der einfach zusammenhängenden Algebra eingeführt. Jeder solchen Algebra A wird ein Baum G_A zugeordnet. In der vorliegenden Arbeit werden die Algebren beschrieben, deren Baum keine Verzweigung aufweist. Diese stehen in enger Beziehung zu gewissen selbstinjektiven Algebren, die in [2] beschrieben werden. Einige Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind schon in [1] aufgeführt, jedoch ohne Beweise. Hier nun werden einerseits neue Ergebnisse geliefert und andererseits die in [1] fehlenden Beweise gegeben.

Die Klassifikation der Algebren steht in Zusammenhang mit der Beschreibung von Mustern. Dieser Begriff wird im ersten Paragraphen erklärt. Ebenso wird dort der Begriff des Grenzpunkts eingeführt. Dieser gestattet eine Unterteilung der Muster in Atome der Klassen α , β und $\alpha\beta$. Im dritten Paragraphen beschreiben wir diese Atome mit Hilfe der Stammbäume, welche in §2 untersucht werden. Die Ergebnisse von §3 erlauben eine Beschreibung der Anzahl a_n der Isomorphieklassen von Algebren A mit zugehörigem A_{n+1} -Baum. Dies ist Inhalt von §5, wobei die Potenzreihe berechnet wird, deren n -ter Koeffizient durch a_n gegeben wird. In §4 wird der Auslander Reiten Köcher Γ_A untersucht.

Ich danke Herrn Prof. P. Gabriel für seine wertvollen Anregungen.

Zürich, im Februar 1982

Christian Läser



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507210_0003

1. Notationen

1.1 Sei Γ ein einfach zusammenhängender, stabiler Translationsköcher mit Translation τ . Der Graph G_Γ hat als Punkte die τ -Bahnen von Γ , wobei die Punkte $\tau^{\mathbb{Z}}x$ und $\tau^{\mathbb{Z}}y$ mit einer nicht gerichteten Kante verbunden sind, falls ein $m \in \mathbb{Z}$ existiert, derart, dass es in Γ einen Pfeil zwischen x und $\tau^m y$ gibt. Γ heisst Netz, falls G_Γ ein endlicher Baum ist.

Sei $\vec{\Gamma}$ ein endlicher gerichteter Baum. Mit T bezeichnen wir denjenigen Baum, der entsteht, wenn wir die Pfeile von $\vec{\Gamma}$ durch nicht gerichtete Kanten ersetzen. Das Netz ZT ist wie folgt definiert. Die Punktmenge $(ZT)^0$ von ZT ist $\mathbb{Z} \times T^0$. Wir zeichnen einen Pfeil von (m, x) nach (n, y) , falls $m=n$ (bzw. $n=m+1$) und ein Pfeil $\varphi \in \vec{T}^1$ existiert mit $t(\varphi) = x$, $h(\varphi) = y$ (bzw. $t(\varphi) = y$, $h(\varphi) = x$). Dabei bezeichnet $t(\varphi)$ den Anfangspunkt (tail) und $h(\varphi)$ den Endpunkt (head) des Pfeils φ .

Sei Γ ein Netz und $\vec{\Gamma}$ ein gerichteter Baum. Wir nehmen an, $T \not\subseteq G_\Gamma$ sei ein Isomorphismus. Seien ferner $x \in \Gamma^0$ und $t \in T^0$ so gewählt, dass $\varphi(t) = \tau^{\mathbb{Z}}x$. Dann existiert genau ein Netzisomorphismus $\Phi: ZT \rightarrow \Gamma$, dergestalt, dass $\Phi((0, t)) = x$ und $\varphi(s) = \tau^{\mathbb{Z}}\Phi((0, s))$ für $s \in T$.

Wir definieren eine Ordnungsrelation auf der Punktmenge Γ^0 des Netzes Γ . Dabei bedeutet $x \leq y$, dass es einen Weg in Γ gibt, der von x nach y führt.

1.2 Sei Γ ein Netz. Wir gehen nun aus von einer Teilmenge $P \subset \Gamma$, welche jede τ -Bahn in höchstens einem Punkt trifft. Dieser Teilmenge ordnen wir eine Abbildung

$$d_P: \Gamma^0 \rightarrow \mathbb{N}$$

in folgender Weise zu.

Zunächst soll $d_P(x) = 0$ sein für alle x mit $x \in P$. Ist $d_P(y)$ für alle y mit $y < x$ definiert, so setzen wir

$$d_P(x) = 1 + \sum_{y < x} d_P(y), \text{ falls } x \notin P,$$

und

$$d_p(x) = \sum_{y \rightarrow x} d_p(y) - d_p(\tau x), \text{ falls } x \in P \text{ und } 0 < d_p(\tau x) < \sum_{y \rightarrow x} d_p(y).$$

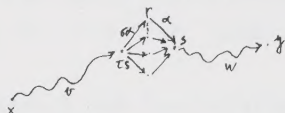
Dabei erstreckt sich die Summe $\sum_{y \rightarrow x} d_p(y)$ über alle direkten Vorgänger y von x in Γ^0 .

In den andern Fällen setzen wir $d_p(x) = 0$.

Mit R_p bezeichnen wir den vollen Untertranslationskörper von Γ , bestehend aus den Punkten x mit $d_p(x) > 0$. Die Maschenkategorie $k(R_p)$ ist wie folgt definiert. Die Objekte von $k(R_p)$ sind die Punkte von R_p , und es ist $k(R_p)(x, y) = W_p(x, y) / J_p(x, y)$. Dabei bezeichnet $W_p(x, y)$ den Vektorraum, der durch die von x nach y laufenden Wege in R_p frei erzeugt wird, und $J_p(x, y)$ ist der Unterraum von $W_p(x, y)$, welcher durch die Elemente $w \left(\sum_{r \rightarrow s} \alpha \sigma(\alpha) \right) v \in W_p(x, y)$ erzeugt wird. Hier bezeichnet v

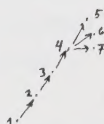
(bzw. w) einen Weg in R_p von x nach τs (bzw. von s nach y). Die Summe erstreckt sich über alle direkten Vorgänger r von s in R_p . Ist α ein Pfeil von r nach s , so bezeichnet $\sigma \alpha$ den Pfeil von τs nach r (vgl. Fig.1).

Fig.1



1.3 Beispiel

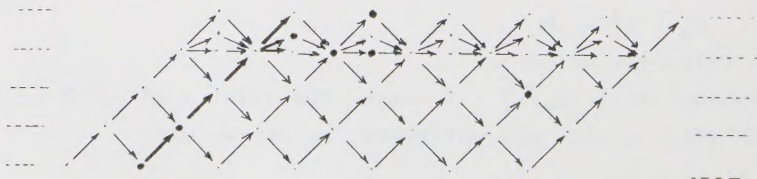
Wir betrachten den Baum $T =$



und

$$P = \{(0,1), (0,2), (0,6), (1,4), (1,5), (1,7), (4,3)\} \subset ZT \text{ (vgl. Fig.2)}.$$

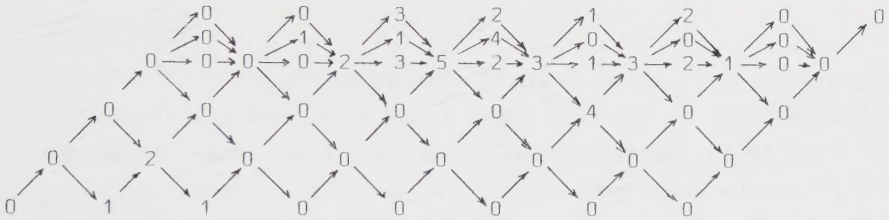
Fig.2



Dabei sind die Pfeile des vollen Unterköchers von $\mathbb{Z}T$, bestehend aus den Punkten $\{(0, x) : x \in T^0\}$, fett eingetragen.

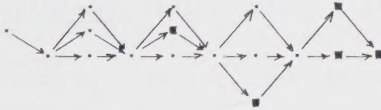
Die folgende Figur liefert die Werte von d_p :

Fig.3



Die nächste Figur zeigt den Translationsköcher R_p .

Fig.4



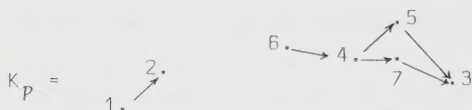
1.4 Die Punkte von $\mathcal{P}$ sind die projektiven Punkte von R_p . In Fig.4 sind die injektiven Punkte des Translationsköchers R_p fett eingezeichnet.

Mit K_p bezeichnen wir den Köcher der vollen Unterkategorie von $k(R_p)$, bestehend aus den projektiven Punkten. K_p ist auch der Köcher der Algebra

$$A_p := \bigoplus_{p, q \in \mathcal{P}} k(R_p)(p, q) .$$

Beispiel:

Für die Menge P von Beispiel 1.3 erhält man:

Definition.

Ein Paar (P, Γ) , bestehend aus einem Netz Γ und einer Teilmenge $P \subset \Gamma^0$, welche jede τ -Bahn von Γ in genau (bzw. höchstens) einem Punkt trifft, heisst Muster (bzw. Teilmuster) von Γ . Das Muster (bzw. Teilmuster) heisst zusammenhängend, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- (i) R_P ist zusammenhängend.
- (ii) K_P ist zusammenhängend.

Ein zusammenhängendes (Teil-) Muster heisst darstellungsendlich, falls R_P endlich ist.

Bemerkung:

Es ist nicht unmittelbar klar, dass (ii) aus (i) folgt. Nach 6.4 [1] liefert der Funktor

$M : k(R_P) \rightarrow \text{mod } A_P$, welcher durch

$$M(x) = \bigoplus_{p \in P} k(R_P)(p, x)$$

definiert wird, eine Äquivalenz zwischen $k(R_P)$ und einer vollen Unterkategorie von $\text{ind } A_P$. Ferner induziert M , falls R_P zusammenhängend ist, einen Translationsköcherisomorphismus von R_P auf eine Zusammenhangskomponente des Auslander-Reiten Köchers Γ_{A_P} .

Wir nehmen nun an, $p \in K_P$ und $q \in K_P$ gehören zu verschiedenen Zusammenhangskomponenten von K_P . Dann liegen die projektiven

Moduln in $\text{ind } A_p$, welche diesen Punkten entsprechen, in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von Γ_{A_p} . Folglich ist R_p nicht zusammenhängend.

1.5 Sei $x \in \Gamma^0$. Mit $G_\Gamma^+(x)$ bezeichnen wir den Schnitt durch das Netz Γ , welcher x als einzige Quelle besitzt.

Definition:

Ist (P, Γ) ein zusammenhängendes (Teil-) Muster, so heisst $p \in P$ Grenzpunkt, falls jeder Punkt $q \in P$ mit $q \geq p$ ein Element von $G_\Gamma^+(p)$ ist.

Bemerkung:

Die maximalen Punkte von P sind offenbar Grenzpunkte von P .

1.6 Sei $p \in P$ ein Grenzpunkt des zusammenhängenden Musters (P, Γ) . Dieser liefert eine Unterteilung des Musters (P, Γ) in Teilmuster $(P_1, \Gamma), \dots, (P_r, \Gamma)$ in folgender Weise.

$$P_i = \{x \in P : \tau^{\mathbb{Z}} x \in B_i\}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Dabei sind die B_i ($i=1, \dots, r$) Teilbäume von $B = G_\Gamma$, dergestalt, dass die folgenden Bedingungen a), b), c) erfüllt sind.

$$a) \quad B = \bigcup_{i=1}^r B_i.$$

$$b) \quad B_i \cap B_j = \tau^{\mathbb{Z}} p, \quad \text{falls } i \neq j.$$

$$c) \quad \tau^{\mathbb{Z}} p \text{ ist Randpunkt des Baumes } B_i, \text{ d.h. } \tau^{\mathbb{Z}} p \text{ besitzt genau einen Nachbarn in } B_i.$$

Satz:

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

$$a) \quad R_{P_i} \text{ ist zusammenhängend.}$$

$$b) \quad k(R_{P_i})(x, y) \neq k(R_p)(x, y), \quad \text{falls } x, y \in P_i.$$

$$c) \quad k(R_{P_i})(x, p) \otimes_k k(R_{P_j})(p, y) \neq k(R_p)(x, y), \quad \text{falls } x \in P_i, y \in P_j, i \neq j.$$

Beweis:

Mit τ bezeichnen wir hier stets die Translation in Γ .

Wir betrachten die Teilmenge R'_p (bzw. R'_p) derjenigen Punkte τx von R_p (bzw. R_p), für welche entweder $x \notin p$ oder $x \in G_\Gamma^+(p)$. Wir wollen zeigen, dass gilt:

$$(*) \quad \bigcup_{i=1}^r R'_{p_i} = R'_p.$$

Zunächst folgt aus der Definition von d_{p_i} (bzw. d_p) sofort,

dass $\sum_{i=1}^r d_{p_i}$, auf die Menge $\{x \in R_p : x \notin p\}$ eingeschränkt,

mit d_p übereinstimmt. Betrachten wir nun einen Punkt

$\tau x \in G_\Gamma^+(\tau p) \setminus \{\tau p\}$ mit der Eigenschaft, dass jeder echt zwischen τp und τx liegende Punkt entweder zum Träger von d_{p_i} gehört, oder aber der τ -Verschobene eines Projektiven ist.

Sei zunächst $d_{p_i}(\tau x) = 0$ und x nicht projektiv. Dann ist sowohl $d_{p_i}(x) = 0$, als auch $d_p(x) = 0$. Man zeigt alsdann leicht mit vollständiger Induktion nach der Länge des Weges von x nach y , dass $d_{p_i}(y) = d_p(y)$, für sämtliche Punkte $y \in R'_p$ mit $y \geq x$.

Wir nehmen nun an, aus $d_{p_i}(\tau x) = 0$ folge $x \in p$. Dann gilt die

Behauptung:

Ist $\tau y \in G_\Gamma^+(\tau p)$ direkter Vorgänger von τx , so gilt sowohl

$$d_{p_i}(y) > d_{p_i}(\tau x), \text{ als auch}$$

$$d_p(y) > d_p(\tau x).$$

Falls y projektiv ist, so ist nichts zu beweisen. Wir nehmen daher an, $d_{p_i}(\tau y)$ sei von Null verschieden. Nach der Definition von d_{p_i} gilt:

$$d_{p_i}(y) = d_{p_i}(\tau x) + d_{p_i}(z) + m - d_{p_i}(\tau y),$$

falls dieser Ausdruck grösser Null ist. Dabei ist $\tau z \in G_{\Gamma}^+(\tau p)$ direkter Vorgänger von τy und m bezeichnet die Summanden, die allenfalls noch dazukommen. Nach Induktionsvoraussetzung ist $d_{p_i}(z) - d_{p_i}(\tau y) > 0$ und die Behauptung folgt sofort.

Analog beweist man die Behauptung für d_p .

Aus der obigen Behauptung folgt nun, dass sowohl $d_{p_i}(x) > 0$, als auch $d_p(x) > 0$. Damit ist (*) bewiesen.

Seien nun $x, y \in P$ und sei w ein R_p -Weg von x nach y . Offenbar verläuft w ganz in R'_p . Liegen x und y beide in P_i , so liegt w sogar in R'_p . Ist hingegen $x \in P_i$ und $y \in P_j$ für $i \neq j$, so durchläuft w den Punkt p . Im ersten Fall erhält man folglich

$$k(R_{p_i})(x, y) \approx k(R_p)(x, y), \text{ wegen } J_{p_i}(x, y) = J_p(x, y).$$

Damit ist b) bewiesen.

Im zweiten Fall lässt sich $w \in W_p(x, y)$ in eindeutiger Weise schreiben in der Gestalt: $w = w_1 w_2$, mit $w_2 \in W_p(x, p)$ und mit $w_1 = \text{Weg von } p \text{ nach } y$. Dabei ist w genau dann ein Element von $J_p(x, y)$, wenn $w_2 \in J_p(x, p)$. Folglich lässt sich $\bar{w}$ in eindeutiger Weise schreiben als $\bar{w} = \bar{w}_1 \bar{w}_2$ und man erhält:

$$k(R_p)(x, y) \approx k(R_{p_j})(p, y) \otimes_k k(R_{p_i})(x, p).$$

Damit ist c) bewiesen. Schliesslich folgt a) unmittelbar aus b) und c).

1.7 Mit den Bezeichnungen von 1.6 gilt das

Lemma:

Genau dann ist $x \in P_i$ Grenzpunkt des Teilmusters (P_i, Γ) , wenn x Grenzpunkt des Musters (P, Γ) ist.

Beweis:

Falls x Grenzpunkt von P ist, so ist x a fortiori Grenzpunkt von P_i . Wir nehmen an, x sei Grenzpunkt von P_i .

Sei $y \in P$ mit $y \geq x$, wobei wir voraussetzen, dass $\tau^{\mathbb{Z}} y \in B_j$ mit $i \neq j$ (vgl. die Bezeichnungen von 1.6). Es existiert daher ein Weg w in Γ von x nach y . Dieser Weg trifft die τ -Bahn von p im Punkt $\tau^k p$. Aus $k \leq 0$ folgt $y \geq p$. Da p Grenzpunkt ist erhält man $k = 0$. Mithin ist $p \geq x$ und man erhält sofort $y \in G_{\Gamma}^+(x)$ wegen $p \in G_{\Gamma}^+(x)$ und $y \in G_{\Gamma}^+(p)$. Aus $k \geq 0$ folgt $p \geq x$. Dies impliziert $k=0$ und man schliesst wie oben.

1.8 Wir betrachten nun ein zusammenhängendes Muster (P, Γ) . Sei $\{p_1, \dots, p_r\}$ die Menge der Grenzpunkte von P . Die Punkte $\{\tau^{\mathbb{Z}} p_1, \dots, \tau^{\mathbb{Z}} p_r\} \subset B = G_{\Gamma}$ liefern eine Unterteilung des Baumes B in verschiedene Teilbäume $B_1, \dots, B_m$, derart, dass

$$B = \bigcup_{i=1}^m B_i,$$

wobei die B_i maximale Teilbäume von B ohne Punkte $\tau^{\mathbb{Z}} p_j$ im Innern sind. Mit (P_i, Γ) bezeichnen wir das Teilmuster, bestehend aus denjenigen Punkten $x \in P$ mit $\tau^{\mathbb{Z}} x \in B_i$. Man erhält somit eine Unterteilung des Musters (P, Γ) in die Teilmuster $(P_1, \Gamma), \dots, (P_m, \Gamma)$ und es gilt: $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$.

Wir gehen nun umgekehrt aus von einer Teilmenge $\{t_1, \dots, t_r\}$ von Punkten des Baumes $B = G_{\Gamma}$. Diese liefern eine Unterteilung

$$B = \bigcup_{i=1}^m B_i \quad \text{in analoger Weise wie oben.}$$

Wir betrachten nun zusammenhängende Teilmuster $(P_1, \Gamma), \dots, (P_m, \Gamma)$ derart, dass $\tau^{\mathbb{Z}} p \in B_i$ für $p \in P_i$. Ferner soll p genau dann ein Grenzpunkt von P_i sein, wenn $\tau^{\mathbb{Z}} p \in \{t_1, \dots, t_r\}$. Andererseits soll aus $\tau^{\mathbb{Z}} p = \tau^{\mathbb{Z}} q = t_k$ für $p \in P_i$, $q \in P_j$ folgen, dass $p=q$ gilt. Dann ist nach Satz 1.6 $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$ ein zusammenhängendes Muster in Γ und die $P_1, \dots, P_m$ sind nach Lemma 1.8 durch P eindeutig bestimmt.

Definition:

Das zusammenhängende Muster (P, Γ) heisst Atom, falls seine sämtlichen Grenzpunkte auf Randbahnen von Γ liegen.

Nach den Ueberlegungen oben lassen sich die zusammenhängenden Muster (P, Γ) "zusammensetzen" aus Atomen auf vollen, zusammenhängenden, stabilen Untertranslationsköchern von Γ .

1.9 Sei (P, Γ) ein zusammenhängendes Muster und seien $(P_1, \Gamma), \dots, (P_m, \Gamma)$ die in 1.8 definierten Teilmuster. Dann erhält man eine Zerlegung von K_P als Fasersumme:

$$K_P = K_{P_1} \coprod K_{P_2} \coprod \dots \coprod K_{P_m}.$$

Dabei sind die Grenzpunkte in P die Verklebungspunkte.

Sei nun (P, Γ) darstellungsendlich. Wir wollen in diesem Fall eine Beziehung zwischen den A_{P_i} und A_P herstellen. Zunächst ist

$$K_P = K_{P_1} \coprod K_{P_2} \coprod \dots \coprod K_{P_m}$$

der Köcher der Algebra A_P . Bezeichnen

wir mit I_P das Ideal der Köcheralgebra KK_P , welches erzeugt wird von den Differenzen $v-w$ der Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt und von den Wegen von $p \in P$ nach $q \in P$ mit $k(R_P)(p, q) = 0$, so gilt nach [2] Prop. 5.1, dass: $KK_P/I_P \cong A_P$.

Aus Satz 1.6 folgt unmittelbar: I_P wird erzeugt von $I_{P_1}, \dots, I_{P_m}$.

1.10 Definition:

Die beiden Muster (P, Γ) und (P', Γ') heissen isomorph, falls ein Translationsköcherisomorphismus

$$\phi : \Gamma \cong \Gamma'$$

existiert mit $P' = \phi(P)$.

Wegen 6.4 [1] gilt $(P, \Gamma) \cong (P', \Gamma')$ genau dann, wenn $A_P \cong A_{P'}$.

Definition:

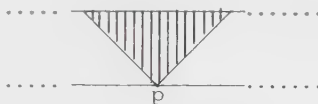
Die beiden Muster (P, Γ) und (P', Γ') heissen aequivalent (in Zeichen: $(P, \Gamma) \sim (P', \Gamma')$), falls ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$\tau^n(P) = P' .$$

2. Stammbäume

Sei $\vec{A}_n = 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$. Mit $p_i \in P$ bezeichnen wir den Punkt mit $\tau_{p_i} = i$.
 2.1 Sei p ein Punkt von $\mathbb{Z}A_n$, der auf der untersten τ -Bahn liegt (d.h. p liegt auf derjenigen Bahn von $\mathbb{Z}A_n$, welche $1 \in A_n$ entspricht). Mit D_p bezeichnen wir die Menge der Punkte von $\mathbb{Z}A_n$, welche im schraffierten Dreieck (inkl. Rand) von Fig.1 liegen.

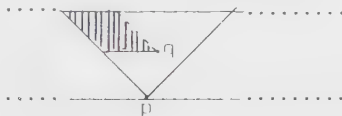
Fig.1



Wir betrachten nun eine Teilmenge $P \subset \mathbb{Z}A_n$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (A) P ist enthalten in D_p und trifft jede τ -Bahn von $\mathbb{Z}A_n$ genau in einem Punkt. Für $q \in P$ gilt ferner: Die Punkte des schraffierten Parallelogramms (gestrichelter Rand nicht eingeschlossen) von Fig.1' treffen P nicht.

Fig.1'



Mit den obigen Bezeichnungen gilt das

Lemma:

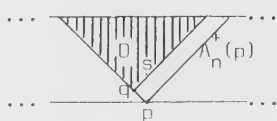
Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) P erfüllt die Bedingung (A).
 (ii) $A_n^+(p) \subset R_p$.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": Falls p der einzige projektive Punkt von $A_n^+(p)$ ist, so erhält man die Situation von Fig.2. Wir dürfen daher annehmen,

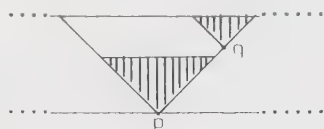
Fig.2



dass der Schnitt s in $R_{P \setminus \{p\}}$ enthalten ist. Sind $a_2, \dots, a_n$ die Werte von $d_{P \setminus \{p\}}$ auf s , so erhält man offenbar die Werte $a_2+1, \dots, a_n+1, 1$ von d_p auf

$A_n^+(p)$, und das Lemma ist in diesem Fall bewiesen. Wir dürfen daher annehmen, dass ein weiterer projektiver Punkt q auf $A_n^+(p)$ liegt. Wir erhalten die Situation von Fig.3 und schliessen mit Induktion unter Berücksichtigung von 1.6(*) .

Fig.3



$R_p \subset$ schraffierten Bereich .

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Zum Punkt $x \in A_n^+(p) \setminus \{p\}$ auf der äussersten Bahn existiert ein $q \in P$ mit $k(R_p)(q, x) \neq 0$. Wir dürfen annehmen, dass $x \neq q$, weil P zusammenhängend ist. Folglich ist $p \leq q < x$. Falls ein q existiert mit $p < q < x$, so schliessen wir wegen 1.6(*) mit vollständiger Induktion. Im andern Fall haben wir die Situation von Fig.2, wobei $s \subset R_{P \setminus \{p\}}$. Man schliesst wiederum mit vollständiger Induktion.

2.2 Wir wollen in diesem Abschnitt den Köcher K_p beschreiben, falls P die Bedingung (A) von 2.1 erfüllt. Dazu konstruieren wir den Köcher Q_p in folgender Weise:

Die Punkte von Q_p sind die Punkte von P . Sind $p_i, p_j \in P$ (p_i bezeichnet den projektiven Punkt auf der i -ten Bahn von $\mathbb{Z}A_n$), so zeichnen wir einen Pfeil φ von p_i nach p_j , falls eine der folgenden beiden Bedingungen a), b) erfüllt ist :

a) ...



b) ...



$p_j \in A_n^+(p_i)$. Für alle p_k mit

$i < k < j$ ist $p_i \not\leq p_k \leq p_j$.

$p_j \in A_n^+(p_i)$. Für alle p_k mit

$i < k < j$ ist $p_i \not\leq p_k \leq p_j$.

Im Fall a) (bzw. b)) heisst φ Pfeil der Klasse α (bzw. β).
Aus (A) von 2.1 folgt sofort: Ist $p_i \xrightarrow{\varphi} p_j$ ein β -Pfeil, so ist
 $j \neq i + 1$.

Sei S_∞ der unendliche Köcher von Fig.4:



Dabei bezeichnen wir $\varphi \in S_\infty$ als α -(bzw. β -) Pfeil, falls $t(\varphi)$
(bzw. $h(\varphi)$) zwischen 1 und $h(\varphi)$ (bzw. $t(\varphi)$) liegt.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt das

Lemma:

Es existiert ein Köcherisomorphismus, welcher Q_P auf einen zusammenhängenden Unterköcher von S_∞ abbildet, dergestalt, dass α -(bzw. β -) Pfeile auf α -(bzw. β -) Pfeile gehen und p auf 1 abgebildet wird. Ferner ist $K_P = Q_P$ und $A_P \cong K_P/I_P$, wobei I_P das Ideal ist, welches erzeugt wird von $\{\varphi\psi : \varphi = \alpha\text{-Pfeil}, \psi = \beta\text{-Pfeil}\}$.

Beweis:

In der Situation von Fig.5 ist $q \in P$ ein Grenzpunkt und man schliesst mit Induktion unter Berücksichtigung von 1.9. Wir dürfen daher annehmen, dass wir die Situation von Fig.6 haben. Nach Induktionsvoraussetzung gilt das Lemma für das zusammenhängende Muster $P \setminus \{q\}$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung für P .

Fig.5

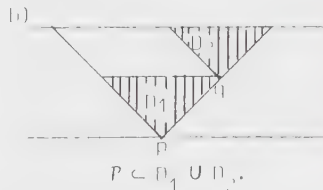
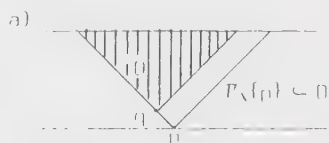
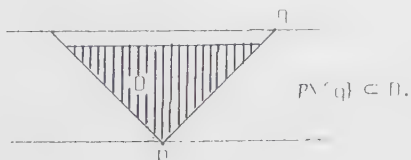


Fig.6



Definition:

Sei S ein Köcher mit n Punkten und mit $s \in S^0$. Das Paar (S, s) heisst Stammbaum (mit n Punkten), falls ein Isomorphismus von S auf einen zusammenhängenden Unterköcher von S_∞ existiert, so, dass s auf 1 abgebildet wird. Der Punkt $s \in S^0$ heisst Wurzel des Stammbaums.

2.3 In 2.2 wurde gezeigt, dass (K_p, p) ein Stammbaum ist, falls P die Bedingung (A) von 2.1 erfüllt. Wir gehen nun aus von einem Stammbaum (S, s) und ordnen diesem ein Muster $(M(S, s), \mathbb{Z}_n)$ zu, dergestalt, dass $M(S, s)$ die Bedingung (A) von 2.1 erfüllt. Ferner soll gelten:

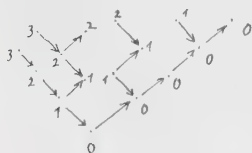
$$K_{M(S, s)} = S.$$

Zunächst teilen wir die Pfeile von S ein in eine α - und eine β -Klasse in der selben Weise, wie wir dies bei S_∞ getan haben. Nun definieren wir eine Spannung f auf S (d.h. eine Abbildung f von der Menge S^1 der Pfeile von S , nach $\mathbb{Z}$) in folgender Weise:

$$f(\varphi) = \begin{cases} -1, & \text{falls } \varphi \text{ ein } \beta\text{-Pfeil ist,} \\ 0, & \text{falls } \varphi \text{ ein } \alpha\text{-Pfeil ist.} \end{cases}$$

Ein Potential zur Spannung f ist eine Abbildung $g: S^0 \rightarrow \mathbb{Z}$

mit $f(\varphi) = g(h(\varphi)) - g(t(\varphi))$ für alle $\varphi \in S^1$. Zwei Potentiale zur selben Spannung sind gleich bis auf eine Konstante. Insbesondere existiert genau ein Potential f_i zu f mit $i = \min(\text{Im}f_i)$.

Beispiel 1:

Wir haben die Punkte des Stammbaums mit den Werten der Funktion f_Π versehen.

Ist $x \in S^0$, so bezeichnet $S(x)$ den maximalen Unterköcher von S , so dass $(S(x), x)$ ein Stammbaum ist. Die Punkte von $S(x) \setminus \{x\}$ heissen Ahnen von x . Existiert ein α - (bzw. β -) Pfeil von x nach y , so heissen die Ahnen von y (bzw. x) α - (bzw. β -) Ahnen von x (bzw. y).

Die Spannung g auf S ist wie folgt definiert.

$$g(\varphi) = \begin{cases} -1, & \text{falls } \varphi \text{ ein } \beta\text{-Pfeil ist,} \\ 1 + \text{Anzahl der } \beta\text{-Ahnen von } t(\varphi), & \text{falls } \varphi \text{ ein } \alpha\text{-Pfeil ist.} \end{cases}$$

Beispiel 2:

Die Werte von g_1 für den Stammbaum des obigen Beispiels sind die folgenden:



Nach 2.2 hat $M(S,s)$ notwendig die folgende Gestalt:

Der Punkt $x \in S^0$ liefert den Punkt x' von $M(S,s)$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\tau^{\mathbf{Z}} x' = g_1(x) \in A_n$$

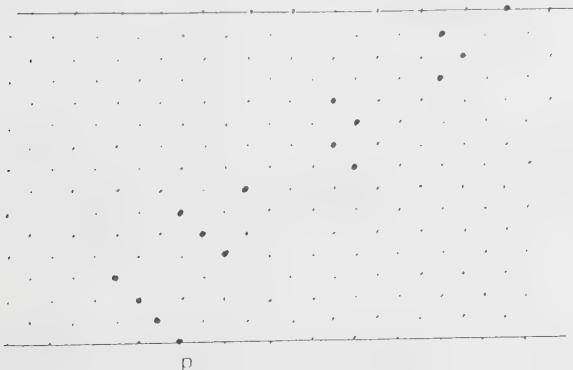
$$\tau^{-f_0(x)} (x') \in A_n^+(p) \quad ,$$

d.h. $g_1(x)$ gibt an, auf welcher Bahn x' sich befindet und $f_0(x)$ bestimmt den Abstand des Schnittes durch x' vom Schnitt durch p .

Beispiel 3:

Für den Stammbaum (S,s) von Beispiel 1 und 2 erhält man

$$M(S, s) =$$



Mit den obigen Bezeichnungen gilt das

Lemma:

$M(S,s)$ erfüllt die Bedingung (A) von 2.1 und es gilt:

$$(K_{M(S,s)}, p) \approx M(S,s) .$$

Beweis:

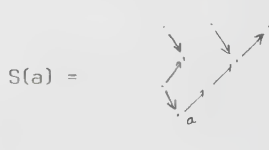
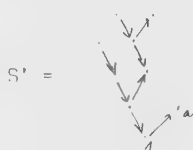
Wir nehmen zunächst an, in der Wurzel s starte kein α -Pfeil. Wir erhalten alsdann den Stammbaum $(S', t(p))$, indem wir den β -Pfeil $\varphi \in S^1$, welcher in s endet, weglassen. Wir dürfen annehmen, das Lemma sei für $(S', t(p))$ bereits bewiesen. Daraus folgt die Behauptung für (S,s) , wegen

$$g_1|S' = g'_1 + 1$$

$$f_0|S' = f'_0 + 1 .$$

Startet in s ein α -Pfeil φ , derart, dass $h(\varphi)$ Randpunkt ist von S , so schliesst man wie oben. Wir dürfen daher annehmen, $a = h(\varphi)$ besitze Ahnen. Das Lemma gilt nun sowohl für den Stammbaum $(S(a), a)$ (=maximaler Unterstammbaum von S mit Wurzel a), als auch für den Stammbaum (S', s) , bestehend aus denjenigen Punkten von S , welche nicht Ahnen von a sind (vgl. Fig.7). Daraus folgt die Behauptung, denn der Punkt a liefert einen Grenzpunkt von $M(S,s)$.

Fig.7:



2.4 Definition:

Der Pfeil $\varphi \in \mathbb{Z}A_D$ heisst α -(bzw. β -) Pfeil, falls $\tau^{\mathbb{Z}} t(p) < \tau^{\mathbb{Z}} h(p)$ (bzw. $\tau^{\mathbb{Z}} h(p) < \tau^{\mathbb{Z}} t(p)$) .

2.5 Das Muster $(P, \mathbb{Z}A_n)$ heisst α -(bzw. β -) Muster, falls $R_P \subset \mathbb{Z}A_n$ einen Unterkörper der Gestalt A_n enthält, dessen sämtliche Pfeile zur α -(bzw. β -) Klasse in $\mathbb{Z}A_n$ gehören.

Bemerkung:

Mit $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ist auch jedes dazu äquivalente Muster ein α -Muster. In jeder Äquivalenzklasse von α -Mustern liegt genau ein Muster $(P, \mathbb{Z}A_n)$, so dass P die Bedingung (A) von 2.1 erfüllt.

Lemma:

$(P, \mathbb{Z}A_n)$ ist genau dann sowohl ein α - als auch ein β -Muster, wenn K_P ein gerichteter A_n -Baum ist und p_1 (=projektiver Punkt auf der ersten Bahn) ein Randpunkt von K_P ist.

Beweis:

Nach 2.1 ist P genau dann sowohl α - als auch β -Muster, wenn P im schraffierten Gebiet von Fig.8 liegt, und wenn für einen Punkt $q \in P$ gilt: Die Punkte des schraffierten Parallelogramms (gestrichelter Rand nicht eingeschlossen) von Fig.9 gehören nicht zu P . Daraus folgt die Behauptung sofort.

Fig.8

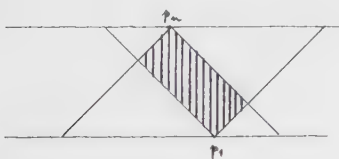
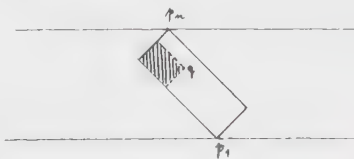


Fig.9



2.6 Satz:

Mit den Bezeichnungen von 2.3 gilt:

Die Abbildung $(S, s) \mapsto (M(S, s), \mathbb{Z}A_n)$ induziert eine Bijektion von der Menge der Isomorphieklassen von Stammbäumen mit n Punkten in die Menge der Äquivalenzklassen von α -Mustern mit n Punkten.

Beweis:

Sei $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ein α -Muster. Dann ist (K_P, p_1) nach Lemma 2.2 ein Stammbaum. Offensichtlich ist (K_P, p_1) isomorph zu $(K_{P'}, p'_1)$, falls $(P, \mathbb{Z}A_n)$ äquivalent ist zu $(P', \mathbb{Z}A_n)$. Wir wollen nun zeigen, dass $(M(K_P, p_1), \mathbb{Z}A_n) \sim (P, \mathbb{Z}A_n)$. Daraus folgt zusammen mit Lemma 2.3 die Behauptung. Wegen Lemma 2.3 ist $(K_{M(K_P, p_1)}, p) \simeq (K_P, p_1)$. Aus Lemma 2.2 folgt andererseits: Ist $K_P \not\simeq K_{P'}$, so ist $A_P \not\simeq A_{P'}$, d.h.

$(P, \mathbb{Z}A_n) \not\simeq (P', \mathbb{Z}A_n)$. Folglich existiert ein Isomorphismus $\Phi: (M(K_P, p_1), \mathbb{Z}A_n) \simeq (P, \mathbb{Z}A_n)$. Wäre Φ keine Translation (d.h. $\Phi \notin \tau^{\mathbb{Z}}$), so müsste P sowohl ein α - als auch ein β -Muster sein. Folglich wäre K_P nach Lemma 2.5 ein gerichteter A_n -Baum und p_1 ein Randpunkt von K_P . In diesem Fall folgt jedoch

$$(M(K_P, p_1), \mathbb{Z}A_n) \sim (P, \mathbb{Z}A_n)$$

unmittelbar aus der Definition von $M(?)$.

3. Die Struktur der A_n -Atome.

3.1 Sei $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ein Muster. Dann gilt das

Lemma:

Seien $x, y \in R_P$ mit $k(R_P)(x, y) \neq 0$. Dann sind sämtliche Punkte z des schraffierten Rechtecks $R(x, y)$ (inkl. Rand) von Fig.1 Elemente von R_P und es gilt für die Punkte z dieses Rechtecks:

$$k(R_P)(x, z) = k.$$

Fig.1:



Beweis (Vollständige Induktion nach der Länge des Weges von x nach y):

Falls $R(x, y)$ ein entartetes Rechteck (Punkt oder Strecke) ist, so ist nichts zu beweisen. Wir nehmen daher an, $R(x, y)$ sei wie in Fig.1'.

Seien y', y'' die direkten Vorgänger von y (vgl. Fig. 1'). Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$k(R_P)(x, y') \neq 0$ ist. Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung die Behauptung für $R(x, y')$. Folglich ist

$$\dim k(R_P)(x, y') = \dim k(R_P)(x, ty) = 1. \text{ Falls auch } y'' \in R_P \text{ ist,}$$

so erhält man die Behauptung wegen

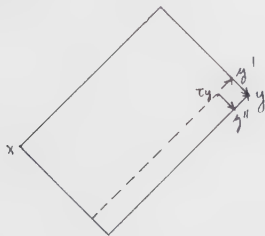
$$\dim k(R_P)(x, y) = \dim k(R_P)(x, y') + \dim k(R_P)(x, y'') - \dim k(R_P)(x, ty).$$

Wäre hingegen $y'' \notin R_P$ so würde man

$$\dim k(R_P)(x, y) = 0$$

erhalten. Widerspruch.

Fig.1' :



3.2 Wie in §2 bezeichnen wir mit $p_1 \in P$ den projektiven Punkt auf

der i -ten Bahn von $\mathbb{Z}A_n$.

Wir gehen nun aus von einem zusammenhängenden Muster $(P, \mathbb{Z}A_n)$ und bilden den Köcher Q_P wie folgt:

Die Punkte von Q_P sind die Punkte von P und es existiert ein Pfeil von p_i nach p_j , falls eine der beiden Bedingungen a), b) erfüllt ist.

a) $i < j$: $p_j \in A_n^+(p_i)$ und $p_i \not\leq p_k$ für alle $i < k < j$.

b) $j < i$: $p_j \in A_n^+(p_i)$ und $p_i \not\leq p_k$ für alle $j < k < i$.

Wir nennen einen Pfeil φ einen α -(bzw. β -)Pfeil, falls φ die Bedingung a) (bzw. b)) erfüllt.

Satz:

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

a) $Q_P = K_P$.

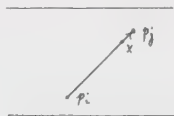
b) $A_P \cong K_P/I$, wobei I das Ideal ist, welches erzeugt wird von den Zusammensetzungen von α -Pfeilen mit β -Pfeilen.

Beweis:

Wir nehmen an, es existiere ein Pfeil in K_P von p_i nach p_j mit $i < j$. Nach Lemma 1.3 liegen dann sämtliche Punkte des Rechtecks $R(p_i, p_j)$ in R_P . Falls $p_j \notin A_n^+(p_i)$, so liefert dies den Widerspruch $\tau p_j \in R_P$. Somit ist $p_j \in A_n^+(p_i)$, und für alle k mit $i < k < j$ ist $p_i \not\leq p_k$. Folglich existiert ein Q_P -Pfeil von p_i nach p_j .

Wir nehmen nun an, es existiere ein Pfeil in Q_P von p_i nach p_j mit $i < j$. Dann erhalten wir die Situation von Fig.2. Da P zusammen-

Fig.2:



hängend ist, liegt der direkte Vorgänger x von p_j , welcher zwischen p_i und p_j ist, auch in R_P . Folglich existiert ein $p \in P$ mit $k(R_P)(p, x) \neq 0$. Nach Lemma 3.1 gehört somit das ganze Rechteck $R(p, x)$ zu R_P . Da x direkter

Vorgänger von p_j ist, besteht dieses Rechteck nur aus einer Strecke.

Folglich ist $p_i \in R(p, x)$. Mithin ist $k(R_p)(p_i, p_j) = k$ und es existiert ein K_p -Pfeil von p_i nach p_j , weil kein weiterer projektiver Punkt zwischen p_i und p_j liegt. Damit ist a) bewiesen.

Um b) zu beweisen nehmen wir an, es existiere in K_p ein α -Pfeil φ von p_i nach p_j und ein β -Pfeil ψ von p_j nach p_k . Dann ist $k(R_p)(p_i, p_j) = 0$ (nach Lemma 3.1) und folglich ist $\psi \in I_p$ (vgl. 1.9). Man erhält somit $I = I_p$ und die Behauptung ist bewiesen.

3.3 Sei $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ein zusammenhängendes Muster. Dann gilt das

Lemma:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ist ein Atom.
- (ii) $(P, \mathbb{Z}A_n)$ besitzt genau zwei Grenzpunkte.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": Da die Grenzpunkte von $(P, \mathbb{Z}A_n)$ auf Randbahnen liegen müssen, besitzt $(P, \mathbb{Z}A_n)$ höchstens zwei Grenzpunkte. Wir dürfen daher annehmen, dass P genau einen maximalen Punkt p besitzt. Wir betrachten hier den Fall, wo dieser am oberen Rand von $\mathbb{Z}A_n$ liegt. Dies bedeutet, dass sämtliche Punkte von P im schraffierten Gebiet von Fig.3 liegen. Folglich sind die projektiven Punkte, welche auf

Fig.3

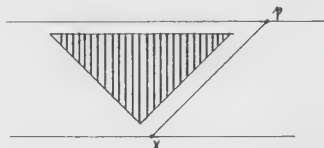


dem Schnitt von x nach p liegen, Grenzpunkte (vgl. Fig.3). Da P zusammenhängend ist, existiert ein projektiver Punkt q mit $k(R_p)(q, p) \neq 0$. Wegen Lemma 3.1 liegt q auf dem Schnitt von x nach p . Folglich ist $x = q$.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Wir nehmen an, $(P, \mathbb{Z}A_n)$ sei kein Atom. Dann lässt sich $(P, \mathbb{Z}A_n)$ in $m > 1$ Atome zerlegen (vgl. 1.8). Jedes dieser Atome besitzt zwei Grenzpunkte. Folglich enthält $(P, \mathbb{Z}A_n)$ genau $m+1 > 2$ Grenzpunkte.

3.4 Wir nehmen nun an, das Muster $(P, \mathbb{Z}A_n)$ sei ein Atom, wobei P genau einen maximalen Punkt p besitzen soll. Dann liegt P im schraffierten Gebiet von Fig.3. Wegen $k(R_p)(x, p) \neq 0$ gehört der Schnitt von x nach p zu R_p . Nach §2 gilt daher für P : Die Menge $P \setminus \{p, x\}$ ist enthalten im schraffierten Dreieck von Fig.4 und erfüllt die Bedingung (A) von 2.1.

Fig.4



Man erhält somit eine Bijektion von der Menge der Äquivalenzklassen von Atomen $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ($n \geq 3$), welche genau einen maximalen Punkt am oberen Rand besitzen, in die Menge der Muster $(P, \mathbb{Z}A_{n-2})$, welche die Bedingung (A) von 2.1 erfüllen.

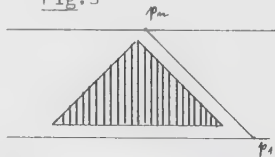
Definition:

Ein Atom $(P, \mathbb{Z}A_n)$ heisst α -(bzw. β)-Atom, falls P genau einen maximalen Punkt enthält und dieser am oberen (bzw. unteren) Rand liegt. Das Atom $(P, \mathbb{Z}A_n)$ heisst $\alpha\beta$ -Atom, falls P zwei maximale Punkte besitzt.

Bemerkung:

Für ein β -Atom $(P, \mathbb{Z}A_n)$ gilt:
 $P \setminus \{p_1, p_n\}$ ist im schraffierten Dreieck von Fig.5 enthalten.
 Dabei gilt für die Punkte $\alpha \in P$ die Bedingung

Fig.5



(B) Die Punkte des schraffierten Parallelogramms (gestrichelter Rand nicht eingeschlossen) von Fig.6 treffen die Menge P nicht.

Fig.6



Satz:

$P \rightarrow (K_P, p_1)$ liefert eine Bijektion von der Menge der Äquivalenzklassen von α -Atomen mit n Punkten in die Menge der Isomorphieklassen von Stammbäumen mit n Punkten, deren Wurzel genau einen α -Ahnen besitzt.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus Satz 2.6 .

3.5 Wir gehen aus von einem $\alpha\beta$ -Atom $(P, \mathbb{Z}A_n)$. In diesem Fall liegt der Punkt p_1 auf der Hypotenuse

(ohne Eckpunkte) des rechtwinkligen Dreiecks mit rechtem Winkel in

p_n (vgl. Fig. 7). Ferner sind p_1

und p_n offenbar die einzigen

Punkte von P , die im schraffierten

Gebiet von Fig. 7 liegen. Andererseits müssen auf dem Schnitt von x nach p_n und auf demjenigen von y nach p_1 weitere projektive

Punkte liegen, da P zusammenhängend ist. Sei z.B. p_i ein projektiver Punkt auf dem Schnitt von x nach p_n . Falls p_i minimal ist mit dieser Eigenschaft, so stimmt d_P , auf den schraffierten Bereich

von Fig. 8 eingeschränkt, mit d_{p_i} überein, wobei wir mit P_i die

Menge der projektiven Punkte p_j bezeichnen, für welche $j \geq i$ gilt.

Das Teilmuster erfüllt daher die Bedingung (A) von 2.1 . Stellt

man die entsprechenden Überlegungen an für den Schnitt von y nach p_1 , so erhält man die Situation von Fig. 9. Dabei gelten die Bedingungen (A) (bzw. (B)) für die Punkte des Dreiecks $p_n b p_i$ (bzw. $a p_1 p_j$) . Folglich liegen die projektiven Punkte sogar im schraffierten Gebiet von Fig. 10 .

Fig. 7

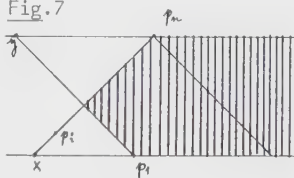


Fig. 8

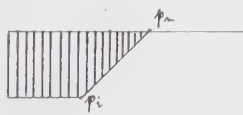


Fig.9

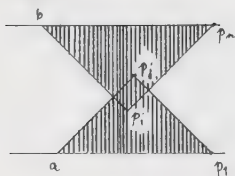
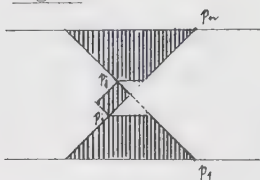


Fig.10



Wir betrachten nun das Teilmuster $(P_{ij}, \mathbb{Z}A_n)$, welches aus den Projektiven gebildet wird, welche zwischen p_i und p_j liegen. Nach Lemma 2.5 ist $K_{P_{ij}}$ ein gerichteter A_k -Baum.

Bemerkung:

Wir haben in diesem Abschnitt vorausgesetzt, dass p_i und p_j minimale projektive Punkte sind auf den entsprechenden Schnitten. Falls wir p_i und p_j als maximal voraussetzen, so erhalten wir das selbe Bild wie in Fig.10.

3.6 Satz:

Sei $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ein Muster und $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $1 < i, i+1 < j < n$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ist ein Atom mit den beiden maximalen projektiven Punkten p_1 und p_n . Ferner ist p_j (bzw. p_i) der maximale projektive Punkt $< p_1$ (bzw. $< p_n$), welcher auf dem schräg nach unten (bzw. nach oben) verlaufenden, in p_1 (bzw. p_n) endenden Schnitt liegt.
- (ii) $\Lambda\{p_1, p_i, p_j, p_n\}$ ist im schraffierten Bereich von Fig.11 enthalten und es gelten die Bedingungen
 (AB) : Ist $1 < k < i$ (bzw. $j < k < n$) so trifft das schraffierte Parallelogramm von Fig.12a) (bzw. Fig.12b)) (gestrichelte Linie nicht eingeschlossen) die Menge P nicht. Der volle Unterkörper von $\mathbb{Z}A_n$, bestehend aus den Punkten p_k mit $i < k < j$, ist ein gerichteter Baum vom Typ A_{j-i-1} .

Fig.11

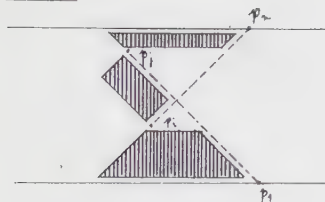
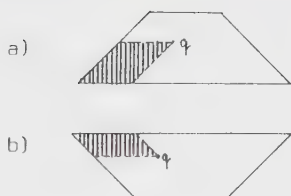


Fig.12



Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": Diese Richtung wurde bereits in 3.5 bewiesen.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Es genügt zu zeigen, dass ein Muster P mit den Eigenschaften (ii) zusammenhängend ist. Betrachten wir das Teilmuster P_i , bestehend aus den Punkten p_k mit $k \leq i$, so erfüllt P_i offenbar die Bedingung (A) von 2.1. Folglich ist der schräge Schnitt von p_i nach p_n in R_{P_i} enthalten. Andererseits ist $d_{P_i}(x) + c = d_P(x)$ für die Punkte x , welche auf diesem Schnitt liegen ($c \in \mathbb{N}$). Entsprechendes gilt für die Punkte p_k mit $1 \leq k \leq j$.

3.7 Sei (S, s) ein Stammbaum. Der Teilstammbaum (Q, s) von (S, s) heisst Stück des linken Randes von (S, s) , falls Q ein gerichteter A_k -Baum ist und falls für die in 2.3 definierten Spannungen gilt:

$$g_{(S, s)}|_Q = g_{(Q, s)}.$$

(Q, s) heisst der linke Rand von (S, s) , falls (Q, s) maximales Stück des linken Randes ist.

Wir gehen aus von zwei Stammbäumen $(S_1, s_1), (S_2, s_2)$. Sei Q ein gerichteter A_k -Baum mit Randpunkten q_1 und q_2 . Ferner sei $f_i : (Q, q_i) \rightarrow (S_i, s_i)$ eine Einbettung von (Q, q_i) auf ein Stück des linken Randes von (S_i, s_i) ($i=1, 2$).

Die Fasersumme $S_1 \amalg S_2$ von

$$\begin{array}{ccc} & S_1 & \\ f_1 \uparrow & & \downarrow f_2 \\ Q & \longrightarrow & S_2 \end{array}$$

bezeichnen wir als die Verklebung der beiden Stammbäume $(S_1, s_1), (S_2, s_2)$ längs dem Stück Q des linken Randes. Wir nennen diese Verklebung

orientiert, falls die Pfeile von $S_1 \overset{Q}{\parallel} S_2$ in eine α - und eine β -Klasse eingeteilt sind, so dass ein $i \in \{1,2\}$ existiert, dergestalt, dass diese Einteilung, auf S_i eingeschränkt, mit der in 2.2 definierten Orientierung übereinstimmt, während sie auf S_j ($i \neq j \in \{1,2\}$) die entgegengesetzte Orientierung induziert.

3.8 Satz:

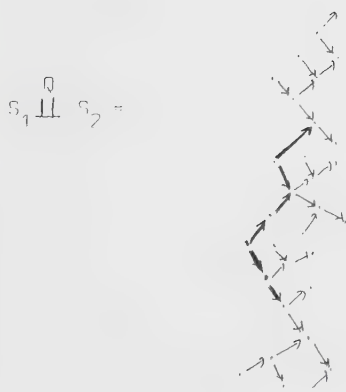
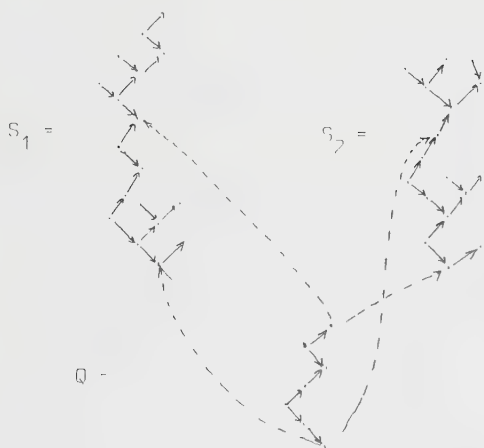
Die Abbildung $P \mapsto K_P$ liefert eine Bijektion von der Menge der Isomorphieklassen (bzw. Ähnlichkeitsklassen) von $\alpha\beta$ -Atomen in die Menge der Isomorphieklassen von Verklebungen (bzw. orientierten Verklebungen) $S_1 \overset{Q}{\parallel} S_2$ mit n Punkten längs einem Stück Q des linken Randes der Stammbäume (S_i, s_i) ($i=1,2$), wobei s_i genau einen α -Ahnen besitzen soll.

Beweis:

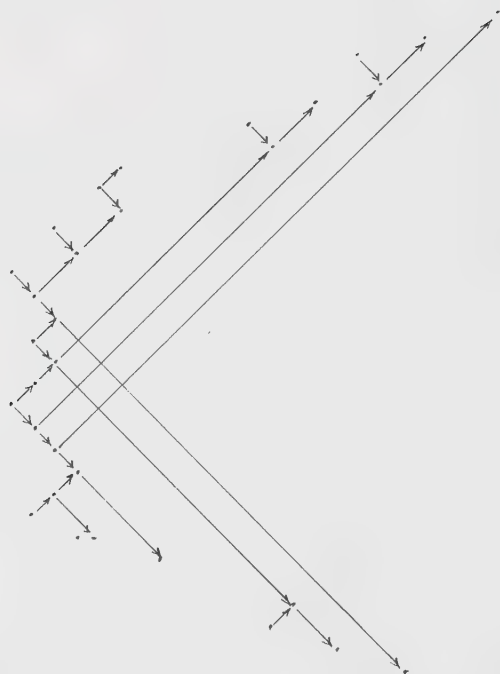
Sei $(P, \mathbb{Z}A_n)$ ein $\alpha\beta$ -Atom. Dann existiert ein Paar $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so dass (i) von Satz 3.6 gilt. Bezeichnet $(P_i, \mathbb{Z}A_n)$ (bzw. $(P_j, \mathbb{Z}A_n)$) das Teilmuster, bestehend aus den Punkten $p_k \in P$ mit $k \leq i$ (bzw. $k \leq j$). So ist (K_{P_i}, p_i) (bzw. (K_{P_j}, p_j)) nach §2 ein Stammbaum. Die Stammbäume (K_{P_i}, p_i) und (K_{P_j}, p_j) besitzen den Unterköcher $K_{P_{ij}}$ gemeinsam, wobei $P_{ij} := \{p_k : i \leq k \leq j\}$. Dies ist offensichtlich nur möglich, falls $(K_{P_{ij}}, p_{ij})$ ein Stück des linken Randes von (K_{P_i}, p_i) ist, und ebenso $(K_{P_{ij}}, p_{ij})$ ein Stück des linken Randes ist von (K_{P_j}, p_j) . Da andererseits kein K_P -Pfeil existiert, welcher einen Punkt des oberen Trapezes von Fig.11 mit einem solchen des unteren Trapezes verbindet, so erhält man:

$$K_P \simeq K_{P_i} \overset{K_{P_{ij}}}{\parallel} K_{P_j}.$$

Der Rest der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.4 .

3.9 Beispiel:

Dies liefert das folgende Muster:



3.10 Wir wollen in diesem Abschnitt eine weitere Beschreibung der $\alpha\beta$ -Atome geben. Dazu betrachten wir die Verklebung K zweier Stammbäume (S_1, s_1) , (S_2, s_2) längs dem (ganzen!) linken Rand. Offenbar existiert ein zusammenhängendes Muster $(P, \mathbb{Z}A_n)$, dergestalt, dass $K_P \cong K$. Falls wir K als orientiert voraussetzen, so ist P bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt. Offenbar ist P Zusammensetzung von α -, β -Atomen und höchstens einem $\alpha\beta$ -Atom.

Definition:

Der Stammbaum (R,s) heisst der rechte Rand des Stammbaums (S,s) , falls (Q^{OP},s) der linke Rand von (S^{OP},s) ist.

Satz:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Das zusammenhängende Muster $(P, \mathbb{Z}A_n)$ lässt sich in α - und β -Atome zerlegen.
- (ii) K_P ist die Verklebung zweier Stammbäume $(S_1, s_1) \cdot (S_2, s_2)$ längs dem rechten Rand.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": Es folgt sofort mit Induktion nach der Anzahl der Atome, in welche sich das Muster zerlegen lässt, dass K_P die Eigenschaft (ii) erfüllt und dass sämtliche Punkte des rechten Randes von K_P Grenzpunkte des Musters sind.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Es genügt zu zeigen, dass p_1 die Wurzel s_1 und p_n die Wurzel s_2 liefert. Da nämlich eine Wanderung ohne Nullrelationen von p_1 nach p_n führt (rechter Rand!), so ist klar, dass sämtliche Punkte dieser Wanderung Grenzpunkte von $(P, \mathbb{Z}A_n)$ sind. Daraus folgt die Behauptung sofort.

Wir nehmen an, den Wurzeln s_1 und s_2 entsprechen die Punkte $p_i, p_j \in P$ mit $1 < i < j$. Der Punkt p_1 ist durch eine Wanderung ohne Nullrelationen mit p_i oder mit p_j verbunden. Da andererseits auch p_i mit p_j durch eine solche Wanderung verbunden ist, so erhält man in jedem Falle eine Wanderung ohne Nullrelation, die von p_1 nach p_j führt. Aus Satz 3.2 folgt, dass p_i weder links noch rechts von dieser Wanderung liegen darf. Folglich führt die Wanderung von p_1 via p_i nach p_j . Daraus folgt $p_1 = p_i$, denn jede andere Wanderung würde im Punkt p_i eine Nullrelation durchlaufen. Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar1:

Die Abbildung $P \mapsto K_P$ liefert eine Bijektion von der Menge der Äquivalenzklassen von zusammenhängenden Mustern (P, ZA_n) , welche sich in lauter α - und β -Atome zerlegen lassen in die Menge der Isomorphieklassen von orientierten Verklebungen mit n Punkten von zwei Stammbäumen längs dem rechten Rand.

Beweis:

Wir haben aufgrund des obigen Lemmas lediglich zu zeigen, dass die Abbildung surjektiv ist. Falls K eine orientierte Verklebung ist mit den im Korollar verlangten Eigenschaften, so ist K^{OP} eine orientierte Verklebung zweier Stammbäume längs dem linken Rand. In diesem Falle existiert jedoch ein Muster (P, ZA_n) mit $K_P \simeq K^{OP}$. Schliesslich existiert ein Muster (Q, ZA_n) mit $K_Q \simeq (K_P)^{OP} = (K^{OP})^{OP} = K$ und die Behauptung ist bewiesen.

Korollar2:

Es existiert eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von $\alpha\beta$ -Atomen mit $n+1$ Punkten und der Menge der Äquivalenzklassen von Tripeln (P_1, P_2, P_3) mit den folgenden Eigenschaften:

$(P_1, ZA_{k+1}) = \alpha$ -Muster

$(P_2, ZA_{l+1}) = \beta$ -Muster

$(P_3, ZA_{m+1}) =$ Zusammensetzung mit $m+1$ Punkten von α - und β -Atomen.

$$k+l+m = n-3.$$

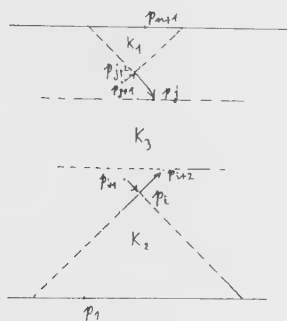
(Dabei ist $(P_1, P_2, P_3) \sim (P'_1, P'_2, P'_3)$ genau dann, wenn die entsprechenden Muster zueinander äquivalent sind.)

Beweis:

Sei P ein $\alpha\beta$ -Atom. Dann existiert genau ein Muster (Q, ZA_{n+1}) , dergestalt, dass die orientierten Köcher K_Q und $(K_P)^{OP}$ zueinander isomorph sind. Andererseits ist $(K_P)^{OP}$ Verklebung zweier Stammbäume (S_1, s_1) , (S_2, s_2) längs dem rechten Rand. Dabei liefert s_1 den Projektiven $q_1 \in Q$ und s_2 den Punkt $q_{n+1} \in Q$. Der Köcher $(K_P)^{OP}$ hat die in Fig.13 skizzierte Gestalt. Dabei sind K_1 und K_2 Stammbäume, und K_3 ist die orientierte

Verklebungen zweier Stammbäume längs dem rechten Rand mit den Wurzeln p_{i+2} und p_j . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Fig.13:



4. Der Auslander-Reiten Köcher Γ_{A_P}

4.1 Wir gehen aus von einem zusammenhängenden Muster $(P, \mathbb{Z}A_n)$. Nach 6.4 [1] existiert ein Translationsköcherisomorphismus von R_P auf Γ_{A_P} . Wir fassen die Punkte von R_P vermöge dieses Isomorphismus als unzerlegbare A_P -Moduln oder als unzerlegbare kontravariante Darstellungen des gebundenen Köchers (K_P, I_P) auf. Sei V eine unzerlegbare Darstellung und sei $p_i \in P$. Nach Lemma 3.1 ist alsdann $\dim V(p_i) \in \{0, 1\}$. Folglich entsprechen die Isomorphieklassen von unzerlegbaren Darstellungen bijektiv den Wanderungen in K_P , welche keine Nullrelationen durchlaufen (d.h. es existiert kein Teilweg der Wanderung, welcher in I_P liegt). Ist w eine solche Wanderung, so bezeichnen wir mit U_w die zugehörige Darstellung mit

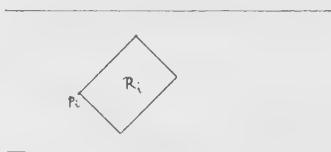
$$U_w(x) = \begin{cases} k, & \text{falls } w \text{ den Punkt } x \text{ durchläuft,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$U_w(\varphi) = \begin{cases} 1_k, & \text{falls } w \text{ den Pfeil } \varphi \text{ enthält.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.2 Wir wollen in diesem Abschnitt die Menge derjenigen unzerlegbaren Darstellungen x bestimmen, für welche $k(R_P)(p_i, x) \neq 0$ ist.

Behauptung: Die Menge $\{x \in R_P : k(R_P)(p_i, x) \neq 0\}$ bildet ein Rechteck R_i (vgl. Fig.1).

Fig.1:



Beweis:

Zunächst liegen die Punkte x mit $k(R_P)(p_i, x) \neq 0$ im schraffierten Bereich von Fig.2a). Aus $k(R_P)(p_i, x) \neq 0$ folgt andererseits $k(R_P)(x, \bar{p}_i) \neq 0$ für den Injektiven $\bar{p}_i$ mit $\text{Soc}(\bar{p}_i) \nrightarrow \text{Dec}(p_i)$. Folglich liegt x im schraffierten Gebiet von Fig.2b).

Wegen $k(R_p)(p_i, \bar{p}_i) = k$ ist für alle Punkte x dieses Rechtecks R_i (nach Lemma 3.1) $k(R_p)(p_i, x) = k$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Fig.2a):

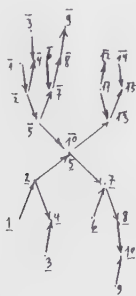


Fig.2b):



4.3 Im folgenden bezeichnet x stets einen Punkt des Rechtecks R_i . Einem solchen Punkt entspricht eine Wanderung von p_a nach p_b , welche p_i enthält und keine Nullrelationen durchläuft. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, es sei $a \leq i$ und $b \geq i$ und bezeichnen p_a als den Anfangspunkt und p_b als den Endpunkt der Wanderung. Mit S_i^+ (bzw. S_i^-) bezeichnen wir den vollen Unterköcher von K_p , bestehend aus denjenigen Punkten von K_p , welche Endpunkt (bzw. Anfangspunkt) einer in p_i startenden (bzw. endenden) Wanderung sind. Offenbar sind (S_i^+, p_i) und (S_i^-, p_i) Stammbäume, und es gilt: Ist (S, p_i) ein Stammbaum mit dem vollen Unterköcher S von K_p , so ist S entweder voller Unterköcher von S_i^+ oder von S_i^- . Mit K_i bezeichnen wir die Verklebung von S_i^+ und S_i^- in der Wurzel p_i . Eine solche Verklebung nennen wir Doppelstammbaum.

4.4 Wir numerieren die Punkte eines Doppelstammbaums K_i von links nach rechts wie im folgenden Beispiel:

Beispiel:

Dem Punkt $x \in R_p$ mit $k(R_p)(p_i, x) = k$ entspricht daher das Paar $(\underline{h}, \bar{l})$ mit $\underline{h} \in (S_i^-)^*$ und $\bar{l} \in (S_i^+)^*$. Wir ordnen diese Paare in folgender Weise:

$(\underline{h}, \bar{l}) \leq (\underline{h}', \bar{l}')$ genau dann, wenn $\underline{h} \leq \underline{h}'$ und $\bar{l} \leq \bar{l}'$.

4.5 Lemma:

Sei $(\underline{h}, \bar{l}) = x \in R_p$ und sei $(\underline{h}', \bar{l}') = x' \in R_p$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $(\underline{h}, \bar{l}) \leq (\underline{h}', \bar{l}')$.

(ii) $k(R_p)(x, x') = k$.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": Wir bezeichnen mit $(\underline{h}'', \bar{l}'')$ den "Durchschnitt" der Wanderungen $(\underline{h}, \bar{l})$ und $(\underline{h}', \bar{l}')$. Dies ergibt die Situation von Fig.3. Offensichtlich existieren in diesem Falle

Darstellungshomomorphismen von x nach x'' und von x'' nach x' .

Fig.3:

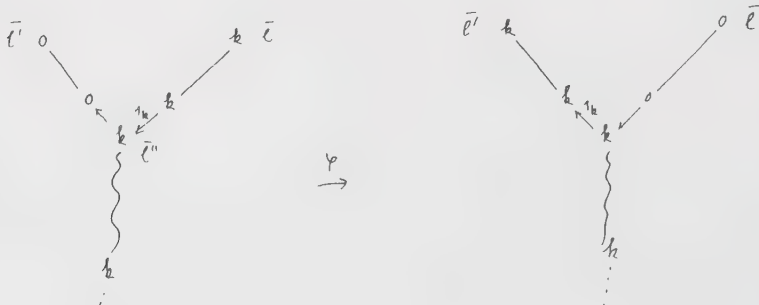


(x'' ist die Darstellung, welche der Wanderung $(\underline{h}', \bar{l}')$ entspricht.)

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Sei $(\underline{h}, \bar{l}) \not\leq (\underline{h}', \bar{l}')$.

Sei $o \in \text{BdA}$, $\bar{l} > \bar{l}'$ und sei $\varphi \in k(R_p)(x, x')$. Wir erhalten die Situation von Fig.4. In diesem Fall ist aber φ notwendig gleich Null. Damit ist das Lemma bewiesen.

Fig4:



Aus dem obigen Lemma folgt:

Die nichtverschwindenden Homomorphismen von $(\underline{h}, \bar{l})$ nach $(\underline{h+1}, \bar{l})$ und von $(\underline{h}, \bar{l})$ nach $(\underline{h}, \bar{l+1})$ sind die irreduziblen Morphismen; welche in $(\underline{h}, \bar{l})$ starten.

4.6 Sei $p_i \in \mathcal{P}$ und seien $\underline{h} \in (S_i^-)$, $\bar{l} \in (S_i^+)$. Die Lage des Unzerlegbaren $(\underline{h}, \bar{l})$ im Auslander-Reiten Köcher wird wie folgt beschrieben:

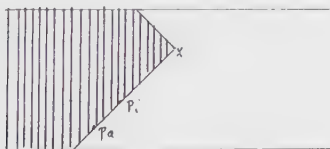
Satz:

Der Unzerlegbare $(\underline{h}, \bar{l})$ ist der Endpunkt des Weges in $\mathcal{A}_n$, welcher, in p_i startend, zunächst $h-1$ Pfeile der Klasse β und alsdann $l-1$ Pfeile der Klasse α durchläuft.

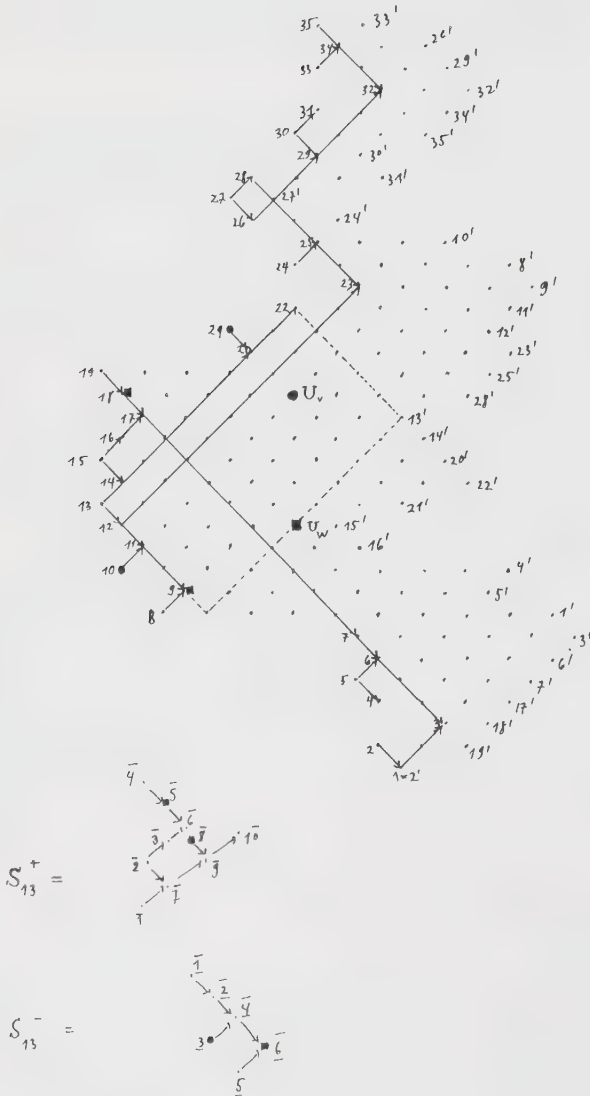
Beweis:

Wir nehmen an, $x \in R_i$ habe die in Fig.5 skizzierte Lage. Die projektiven Punkte p_j mit $k(R_p)(p_j, x) \neq 0$ liegen im schraffierten Gebiet von Fig.5. Der Anfangspunkt p_a der Wanderung, die x zugeordnet ist, stimmt mit dem Punkt $\underline{1} \in (S_i^-)$ überein; denn die Strecke von $\underline{1}$ nach x ist in R_p enthalten. Die Aussage des Satzes folgt daher unmittelbar aus Lemma 4.5.

Fig.5:



4.7 Beispiel:



U_v = Wanderung von p_{10} nach p_{21} .

U_w = Wanderung von u_9 nach p_{18} .

5. Die Anzahl der Klassen von A_n -Mustern

5.1 Wir wollen in diesem Abschnitt die Anzahl d_n der Äquivalenzklassen von α -Atomen ($P, \mathbb{Z}_{n+1}$) berechnen. Bezeichnen wir mit c_n ($n \geq 0$) die Anzahl der Stammbäume mit n Punkten, so gilt

$$c_0 := 1$$

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_0, \quad n \geq 1.$$

Wir erhalten diese Rekursionsformel, indem wir einen Stammbaum zerlegen in die Wurzel, den Stammbaum der α -Ahnen der Wurzel und den Stammbaum der β -Ahnen der Wurzel. Für die Potenzreihe

$$c(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathbb{Q}[[X]]$$

gilt somit: $c - 1 = c^2 X$, d.h.

$$(1) \quad c = \frac{1}{2X}(1 - \sqrt{1 - 4X})$$

Nach Satz 3.4 erhält man d_n als den n -ten Koeffizienten der formalen Potenzreihe

$$(2) \quad d = X \cdot c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4X}$$

5.2 Wir berechnen in diesem Abschnitt die Anzahl f_n der Äquivalenzklassen von $\alpha\beta$ -Atomen mit $n+1$ Punkten. Für die Anzahl e_n der Äquivalenzklassen von zusammenhängenden Mustern mit $n+1$ Punkten, welche sich aus α - und β -Atomen zusammensetzen, erhält man die Rekursionsformel:

$$e_0 = 1$$

$$e_n = 2d_n e_0 + 2d_{n-1} e_1 + 2d_{n-2} e_2 + \dots + 2d_1 e_{n-1}, \quad \text{falls } n > 0.$$

Dies ergibt für $e(X) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n X^n$ die Gleichung $e-1=2de$, d.h.

$$(3) \quad e = \frac{1}{1-2d}$$

Die Anzahl der Stammbäume mit n Pfeilen stimmt mit dem n -ten Koeffizienten der Potenzreihe $\frac{c-1}{X}$ überein. Die Anzahl der $\alpha\beta$ -Atome mit $n+1$ Punkten ist daher der n -te Koeffizient der Potenzreihe $(\frac{c-1}{X})(\frac{c-1}{X}) = X^4$ (folgt aus Korollar 2 von 3.10).

Man erhält somit für $\sum_{n=4}^{\infty} f_n X^n = f(X)$ die Formel

$$(4) \quad f = \frac{(d-X)^2}{1-2d} - \frac{1}{2} + X + \frac{1}{2\sqrt{1-4X}} + \frac{X^2}{\sqrt{1-4X}}$$

Die Formeln (2) und (4) liefern:

Anzahl der Äquivalenzklassen von α -Atomen mit $n+1$ Punkten:

$$d_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Anzahl der Äquivalenzklassen von $\alpha\beta$ -Atomen mit $n+1$ Punkten:

$$f_n = \binom{2n-4}{n-4}.$$

5.3 Bezeichnet g_n die Anzahl der Äquivalenzklassen von zusammenhängenden Mustern mit $n+1$ Punkten, so gilt die Rekursionsformel:

$$g_0 = 1$$

$$g_n = (2d_n + f_n)g_0 + (2d_{n-1} + f_{n-1})g_1 + \dots + (2d_1 + f_1)g_{n-1}, \quad n \geq 1$$

Dies liefert die Gleichung $g = (2d+f)g+1$, d.h. $g = \frac{1}{1-2d-f}$.

Mit (2) und (4) erhält man somit:

$$\begin{aligned} g &= 1/(1-2d - \frac{(d-X)^2}{1-2d}) = (1-2d)/((1-2d)^2 - (d-X)^2) = (1-2d)/((1-3d+X)(1-d-X)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-3d+X} + \frac{1}{1-d-X} \right), \quad \text{d.h.} \end{aligned}$$

$$(5) \quad g(X) = \frac{1}{-1+2X+3\sqrt{1-4X}} + \frac{1}{1-2X+\sqrt{1-4X}}$$

5.4 In diesem Abschnitt soll die Anzahl a_n der Isomorphieklassen zusammenhängender Muster mit $n+1$ Punkten bestimmt werden. Bezeichnet s_n die Anzahl der symmetrischen zusammenhängenden Muster in $\mathbb{Z}A_{2n+1}$, so gilt offensichtlich:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} g_n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} g_n + \frac{1}{2} s_{n/2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Bezeichnet s die Potenzreihe, deren n -ter Koeffizient durch s_n gegeben wird, so erhält man folglich:

$$a(X) = \frac{1}{2}g(X) + \frac{1}{2}s(X^2) \text{ für die Potenzreihe } a(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n.$$

Für s_n erhält man anderseits die Rekursionsformel:

$$s_n = (2d_1 + f_1)s_{n-1} + (2d_2 + f_2)s_{n-2} + \dots + (2d_n + f_n)s_0 + t_n, \quad n \geq 1.$$

Dabei bezeichnet t_n die Anzahl der Äquivalenzklassen von symmetrischen $\alpha\beta$ -Atomen. Aus 3.10, Korollar 2, erhält man leicht, dass t_n der n -te Koeffizient ist der Potenzreihe $\frac{d-X}{1-2d}$. Daraus ergibt sich:

$$s(X) = \frac{(1-d-X)}{1-2d} = g \frac{1-d-X}{1-2d} = g \left(1 + \frac{d-X}{1-2d}\right).$$

Folglich gilt:

$$(6) \quad a(X) = \frac{1}{2}g(X) + \frac{1}{2}g(X^2) \left(1 + \frac{d(X^2)-X^2}{1-2d(X^2)}\right) = \frac{1}{2}g(X) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{(1-2X^2)/\sqrt{1-4X^2}}{1-2d(X^2)}\right)g(X^2)$$

5.5 In diesem Abschnitt soll das asymptotische Verhalten von a_n und g_n beschrieben werden.

Behauptung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\right)^n / g_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\right)^n / a_n = 1.$$

Beweis:

Die Funktion $z \mapsto 1/(1-2z+\sqrt{1-4z})$ ist holomorph in $\{z \in \mathbb{C}: |z| < \frac{1}{4}\}$.

Hingegen hat $h(z) = -1 + 2z + 3\sqrt{1-4z}$ in diesem Gebiet genau eine Nullstelle

$z_0 = 3\sqrt{2} - 4$, d.h. $\frac{1}{h(z)}$ besitzt genau einen Pol (erster Ordnung) in z_0 .

Folglich lässt sich $z \mapsto \frac{1}{h(z)}$ schreiben in der Gestalt:

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)h'(z_0)} + r(z), \text{ wobei } r(z) \text{ eine holomorphe Funktion}$$

ist in $\{z \in \mathbb{C}: |z| < \frac{1}{4}\}$. Man erhält somit:

$$\frac{1}{h(z)} = r(z) + \frac{1}{h'(z_0)z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n.$$

Dies ergibt:

$$g(z) = u(z) + \frac{1}{h'(z_0)z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n, \text{ wobei } u \text{ holomorph ist für } |z| < \frac{1}{4}.$$

Die Cauchy-Abschätzung liefert:

$$|g_n / (-\frac{1}{h'(z_0)z_0^{n+1}}) - 1| = |u_n h'(z_0) z_0^{n+1}| \leq \frac{M}{(\frac{1}{4})^n} z_0^{n+1} h'(z_0) = c(z_0 / \frac{1}{4})^n \rightarrow 0.$$

Dabei ist u_n der n -te Koeffizient der Potenzreihenentwicklung von u um den Nullpunkt.

Da $-\frac{1}{h'(z_0)z_0^{n+1}} = \frac{1}{8}(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2)^n$ ist, folgt somit der erste Teil der Behauptung. Entsprechend zeigt man den zweiten Teil, indem man berücksichtigt, dass die Funktion

$z \mapsto g(z^2)(1 + (1-2z^2)/\sqrt{1-4z^2})$ holomorph ist im Gebiet $\{z: |z| < \frac{1}{4}\}$.

Literaturverzeichnis.

- [1] BONGARTZ, K., GABRIEL, P.: Covering Spaces in Representation Theory. Invent. math. 65, 331-378 (1982).
- [2] BRETSCHER, O., LAESER, C., RIEDTMANN, C.: Selfinjective and Simply Connected Algebras. Manuscripta math. 36, 253-307 (1981).
- [3] CONWAY, J.B.: Functions of One Complex Variable. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag.
- [4] RIEDTMANN, C.: Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück. Comm. Math. Helv. 55, 199-224 (1980).

Lebenslauf

Ich, Christian Martin Läser, Bürger von Gontenschwil (Kt. AG), wurde am 16. September 1949 in Aarau geboren. Im Frühjahr 1965 trat ich ins Lehrerseminar Wettingen ein. Im Frühjahr 1969 erwarb ich an dieser Schule das Lehrpatent. Vom Frühjahr 1972 bis zum Herbst 1974 war ich an der Philosophischen Fakultät II der Universität Basel immatrikuliert. Im Herbst 1974 immatrikulierte ich mich an der Philosophischen Fakultät II der Universität Zürich. Im Herbst 1977 legte ich die Diplomprüfung mit Hauptfach Mathematik und den Nebenfächern Theoretische Physik und Experimentalphysik ab. Meine Dissertation ist unter der Leitung von Prof. Dr. P. Gabriel entstanden. Seit Frühjahr 1978 bin ich am Mathematischen Institut der Universität Zürich als Assistent tätig.

Verzeichnis der Dozenten, an deren Vorlesungen und Seminarien ich teilgenommen habe:

K. Bongartz, F. Fricker, P. Gabriel, W. Greub, H. Gross, N.N. Huber, H. Kappus, G. Karrer, G. Mazzola, V. Meyer, V. Strassen, N. Straumann, A. Thellung, F. Waldner, A. Wyler.

